Лекция № 6.

1. Процесс скользящего среднего.

Еще одной простой моделью порождения временного ряда является процесс **скользящего среднего порядка** q ($MA(q)$). Согласно этой модели,

$$X_t = \varepsilon_t + b_1\,\varepsilon_{t-1} + b_2\,\varepsilon_{t-2} + \ ... + b_q\,\varepsilon_{t-q}, \quad b_q \neq 0,$$

где ε_t — процесс белого шума.

Такой процесс имеет нулевое математическое ожидание. Модель можно обобщить до процесса, имеющего ненулевое математическое ожидание μ, полагая

$$X_t - \mu = \varepsilon_t + b_1\,\varepsilon_{t-1} + b_2\,\varepsilon_{t-2} + \ ... + b_q\,\varepsilon_{t-q}\,,$$

т.е.

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + b_1\,\varepsilon_{t-1} + b_2\,\varepsilon_{t-2} + \ ... + b_q\,\varepsilon_{t-q}.$$

Для процесса скользящего среднего порядка q используется обозначение $MA(q)$ (скользящее среднее — **moving average**).

При $q = 0$ и $\mu = 0$ получаем процесс белого шума. Если $q = 1$, то

$$X_t - \mu = \varepsilon_t + b\,\varepsilon_{t-1}$$

— скользящее среднее первого порядка. В последнем случае

$$D(X_t) = (1 + b^2)\,\sigma_\varepsilon^2,$$

$$\gamma(1) = Cov(X_t, X_{t-1}) = E[(X_t - \mu)(X_{t-1} - \mu)] = b\,\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma(k) = Cov(X_t, X_{t-k}) = E[(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu)] = 0, k > 1,$$

так что процесс X_t является стационарным с $E(X_t) = \mu$, $D(X_t) = (1 + b^2)\, \sigma_\varepsilon^2$,

Автоковариации:

$$\gamma(k) = \begin{cases} (1 + b^2)\, \sigma_\varepsilon^2, & k = 0 \\ b\, \sigma_\varepsilon^2, & k = 1 \\ 0, & k > 1 \end{cases}$$

Автокорреляции этого процесса равны

$$\rho(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ b/(1 + b^2), & k = 1 \\ 0, & k > 1 \end{cases}$$

т.е коррелограмма процесса имеет весьма специфический вид. Коррелированными оказываются только соседние наблюдения. Корреляция между ними положительна, если $b > 0$, и отрицательна при $b < 0$. Соответственно, процесс $MA(1)$ с $b > 0$ имеет более гладкие, по сравнению с белым шумом, реализации, а процесс $MA(1)$ с $b < 0$ имеет менее гладкие, по сравнению с белым шумом, реализации. Заметим, что для любого процесса $MA(1)$ $\rho(1) \le 0.5$, т.е. корреляционная связь между соседними наблюдениями невелика, тогда как у процесса $AR(1)$ такая связь может быть сколь угодно сильной (при значениях a, близких к 1). $\rho(k) = a^k$ для $AR(1)$

Модель $MA(q)$ кратко можно записать в виде

$$X_t - \mu = b(L)\, \varepsilon_t,$$

где

$$b(L) = 1 + b_1 L + \ \dots \ + b_q L^q.$$

Для автоковариации имеем:

$$\gamma(k) = E[(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu)] = \begin{cases} \left(\sum\limits_{j=0}^{q-k} b_j b_{j+k}\right) \sigma_\varepsilon^2, & 0 \le k \le q,\, b_0 = 1, \\ 0, & k > q, \end{cases}$$

так что $MA(q)$ является стационарным процессом с ненулевым математическим ожиданием, дисперсией

$$\sigma_X^2 = (1 + b_1^2 + \dots + b_q^2)\sigma_\varepsilon^2$$

и автокорреляциями

$$\rho_k = \begin{cases} \left(\sum\limits_{j=0}^{q-k} b_j b_{j+k}\right) \Big/ \left(\sum\limits_{j=0}^{q} b_j^2\right), & k = 0, 1, \dots, q, \\ 0, & k = q+1, q+2, \dots. \end{cases}$$

Здесь статистическая связь между наблюдениями сохраняется в течение q единиц времени (т.е. "длительность памяти"процесса равна q).

Подобного рода временные ряды соответствуют ситуации, когда некоторый экономический показатель находится в равновесии, но отклоняется от положения равновесия в силу последовательно возникающих непредсказуемых событий, причем система такова, что влияние таких событий отмечается на протяжении некоторого периода времени.

2. Обратимость процессов $AR(p)$ и $MA(q)$.

Если влияние прошлых событий ослабевает с течением времени показательным образом, так что $b_j = a^j$, $0 < a < 1$, то искусственное предположение о том, что ряд ε_t начинается в "бесконечном прошлом приводит к модели бесконечного скользящего среднего $MA(\infty)$

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a^j \, \varepsilon_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \, \varepsilon_{t-j}, \quad \text{где} \sum_{j=0}^{\infty} |b_j| < \infty$$

Ранее мы видели, что такое же представление допускает стационарный процесс авторегрессии первого порядка $AR(1)$

$$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t, \quad a < 1$$

т.е. в рассматриваемом случае процесс $MA(\infty)$ эквивалентен процессу $AR(1)$.

Вообще всякий стационарный процесс $AR(p)$ можно записать в форме процесса $MA(\infty)$:

$$X_t = \mu + \frac{1}{a(L)}\varepsilon_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} b_j \varepsilon_{t-j} = \mu + b(L)\varepsilon_t,$$

где

$$b(L) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j L^j = \frac{1}{a(L)} \quad \text{и} \quad \sum_{j=0}^{\infty} |b_j| < \infty$$

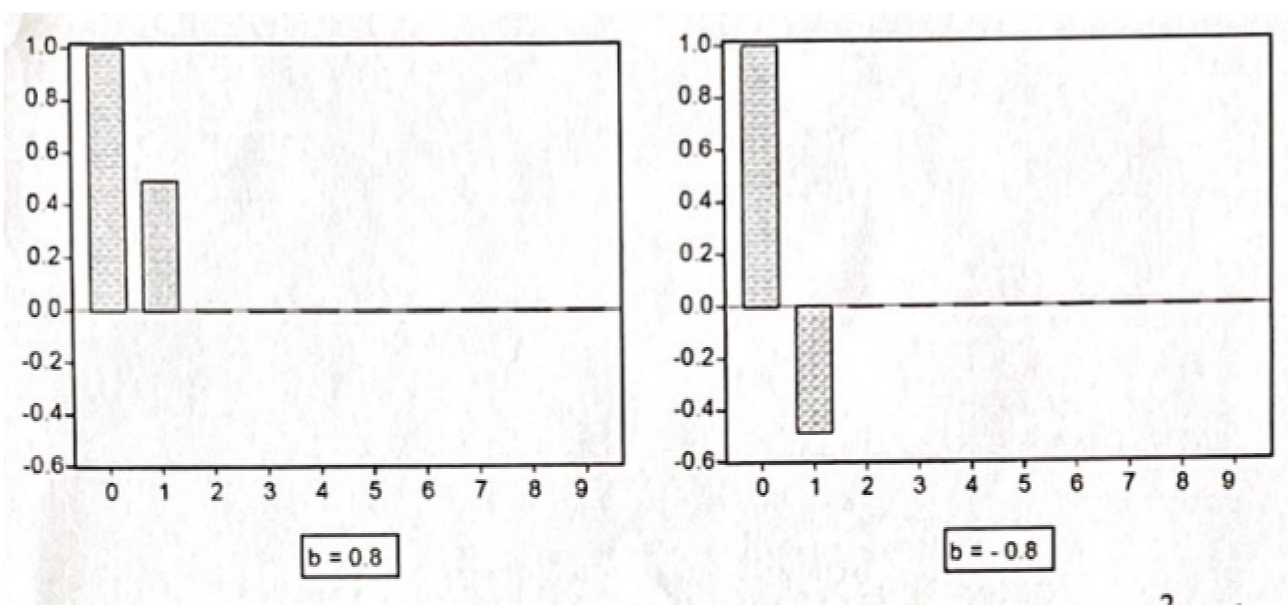
Примеры.

a) Рассмотрим процесс $MA(1)$ с $b = 0.8$ и $\mathbb{E}(X_t) = 6$, т.е. $X_t = +\varepsilon_t + 0.8\varepsilon_{t-1}$.

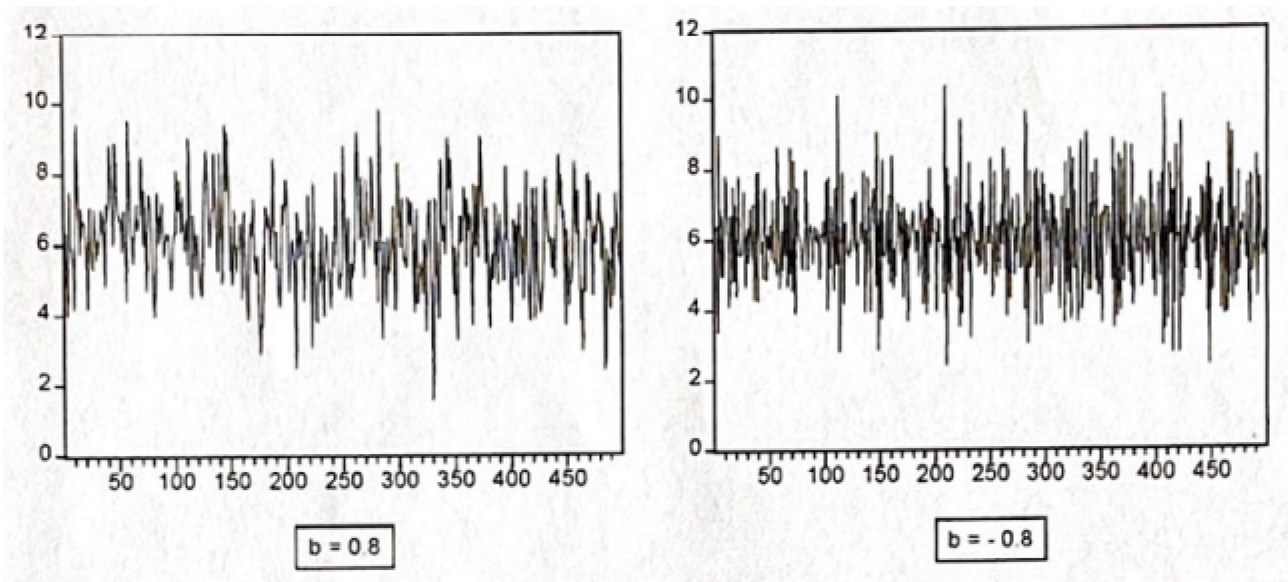
Для него $\rho(1) = 0.8/(1 + 0.8^2) = 0.488$.

b) Для процесса $MA(1)$ с $b = -0.8$ и $\mathbb{E}(X_t) = 6$ имеем $\rho(1) = -0.8/(1 + 0.8^2) = -0.488$.

Коррелограммы этих двух процессов имеют вид:



Смоделированные реализации этих двух процессов с $\sigma_\varepsilon^2 = 1$:

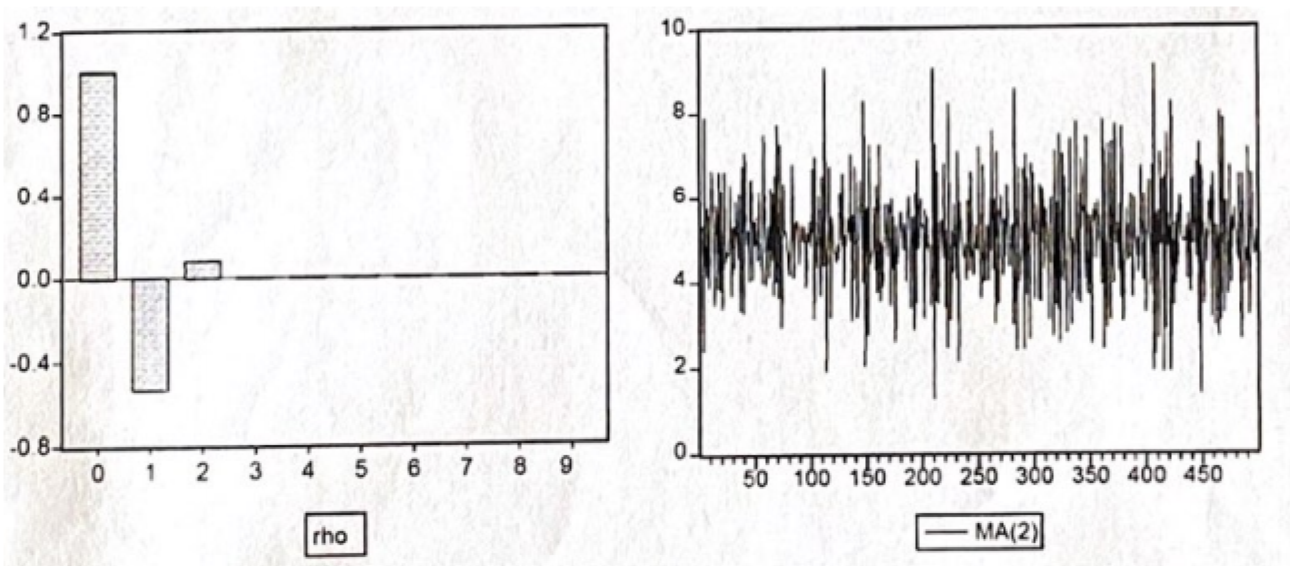


c) Для $MA(2)$ процесса $X_t = 5 + \varepsilon_t - 0.75\,\varepsilon_{t-1} + 0.125\,\varepsilon_{t-2}$ имеем:

$$\rho(1) = (b_0\,b_1 + b_1\,b_2)/({b_0}^2 + {b_1}^2 + {b_2}^2) = (-0.75 - 0.75 \cdot 0.125)/(1 + 0.75^2 + 0.125^2) = -0.535,$$

$$\rho(2) = 0.125/1.578 = 0.079$$

Ниже приводятся коррелограмма и смоделированная реализация этого процесса.



$$AR(p): X_t = \delta + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + ... + a_p x_{t-p} + \epsilon_t, a_p \neq 0$$

$$E\left(X_t\right) = \mu = \frac{\delta}{1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_p}$$

$$\rho(k) = a_1^k - AR(1), k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\rho(k) = a_1 \rho(k-1) + a_2 \rho(k-2) + \ldots + a_p \rho(k-p), k > 0$$

$$MA(q): X_t = \mu + \epsilon_t + b_1 \epsilon_{t-1} + \ldots + b_q \epsilon_{t-q}$$

$$\sigma_x^2 = (1 + b_1^2 + \ldots + b_q^2) \sigma_\epsilon^2$$

$$\rho(k) = \begin{cases} \left(\sum_{j=0}^{q-k} b_j b_{j+k}\right) / \left(\sum_{j=0}^{q} b_j^2\right), & k = 0, 1, \ldots q \\ 0, & k = q+1, q+2, \ldots \end{cases}$$

$$X_t = aX_{t-1} + \epsilon_t$$

1)$X_t = \phi_{11}X_{t-1} + \epsilon_t$. Умножаем на X_{t-1}:

$$\frac{E\left(X_t, X_{t-1}\right)}{Cov\left(X_t, X_t\right)} = \phi_{11}\frac{E\left(X_{t-1}^2\right)}{Cov\left(X_t, X_t\right)} + \frac{E\left(X_{t-1}, \epsilon_t\right)}{Cov\left(X_t, X_t\right)}$$

$$\rho(1) = \phi_{11}\cdot 1 + 0 = a$$

2) a)$X_t = \phi_{21}X_{t-1} + \phi_{22}Xt - 2 + \epsilon_t$. Умножаем на X_{t-1}:

$$\frac{E\left(X_t, X_{t-1}\right)}{Cov\left(X_t, X_t\right)} = \phi_{21}\frac{E\left(X_{t-1}^2\right)}{Cov\left(X_t, X_t\right)} + \phi_{22}\frac{E\left(X_{t-2}, X_{t-1}\right)}{Cov\left(X_t, X_t\right)} + \frac{E\left(\epsilon_t, X_{t-1}\right)}{Cov\left(X_t, X_t\right)}$$

$$\rho(1) = \phi_{21} + \phi_{22}\cdot \rho(1)$$

b)$X_t = \phi_{21}X_{t-1} + \phi_{22}X_{t-2} + \epsilon_t$. Умножаем на X_{t-2}:

$$\frac{E\left(X_{t-2}, X_t\right)}{Cov\left(X_t, X_t\right)} = \phi_{21}\frac{E\left(X_{t-1}, X_{t-2}\right)}{Cov\left(X_t, X_t\right)} + \phi_{22}\frac{E\left(X_{t-2}^2\right)}{Cov\left(X_t, X_t\right)} + \frac{E\left(\epsilon_t, X_{t-2}\right)}{Cov\left(X_t, X_t\right)}$$

$$\rho(2) = \phi_{21}\cdot \rho(1) + \phi_{22}$$

$$\begin{cases} \phi_{21} + \phi_{22}\cdot \rho(1) = \rho(1), \\ \phi_{21}\cdot \rho(1) + \phi_{22} = \rho(2). \end{cases}$$

Нужно найти ϕ_{22} –?

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \end{bmatrix}$$

Решаем данное уравнение методом Крамера:

$$\phi_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\rho(2) - \rho(1)^2}{1 - \rho(1)^2}$$

где Δ_1, Δ_2 и Δ определяется следующим образом

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \rho(1) & \rho(1) \\ \rho(2) & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{vmatrix}$$

Т.к $\rho(k) = a^k$ для любого k, то

$$\phi_{22} = \frac{a^2 - a^2}{1 - a^2} = 0$$

$ARMA(1,1)$:

$$X_t = aX_{t-1} + \epsilon_t + b\epsilon_{t-1}$$

$$X_t = \frac{1+bL}{1-aL}\epsilon_t = (1+bL)\left[1 + aL + a^2L^2 + a^3L^3 + \cdots\right]\epsilon_t =$$

$$= \left[1 + (a+b)L + a(a+b)L^2 + a^2(a+b)L^3 + \cdots\right]\epsilon_t$$

где $\frac{1}{1-aL}$ – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

1) Посчитаем дисперсию от X_t:

$$Var(X_t) = \left[1 + (a+b)^2 a^2(a+b)^2 + a^4(a+b)^2 + \cdots\right]\sigma_\epsilon^2 =$$

$$= \left(1 + \frac{(a+b)^2}{1-a^2}\right)\sigma_\epsilon^2 = \frac{1 - a^2 + a^2 + 2ab + b^2}{1-a^2}\sigma_\epsilon^2 = \frac{1 + 2ab + b^2}{1-a^2}\sigma_\epsilon^2$$

2)$X_t = aX_{t-1} + \epsilon_t + b\epsilon_{t-1}$. Умножаем на X_{t-1}:

$$E\left(X_t, X_{t-1}\right) = aE\left(X_{t-1}, X_{t-1}\right) + bE\left(\epsilon_{t-1}, X_{t-1}\right)$$

$$\gamma(1) = a\gamma(0) + b\cdot Cov\left(\epsilon_{t-1}, X_{t-1}\right)$$

3)$X_{t-1} = aX_{t-2} + \epsilon_{t-1} + b\epsilon_{t-2}$. Умножаем на ϵ_{t-1}:

$$E\left(X_{t-1}, \epsilon_{t-1}\right) = aE\left(X_{t-2}, \epsilon_{t-1}\right)\sigma_\epsilon^2 + bE\left(\epsilon_{t-2}, \epsilon_{t-1}\right)$$

$$Cov\left(X_{t-1}, \epsilon_{t-1}\right) = \sigma_\epsilon^2$$

$$\gamma(1) = a\gamma(0) + b\sigma_\epsilon^2.$$

$$\frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = a + \frac{b\sigma_\epsilon^2}{(1 + b^2 + 2ab)\sigma_\epsilon^2}(1 - a^2) = \frac{a + a^2b + 2ab^2 + b - a^2b}{1 + b^2 + 2ab} = \frac{(a+b)(1+ab)}{1 + b^2 + 2ab}.$$

4)$X_t = aX_{t-1} + \epsilon_t + b\epsilon_{t-1}$. Умножаем на X_{t-2}:

$$E\left(X_t, X_{t-2}\right) = aE\left(X_{t-1}, X_{t-2}\right) + E\left(\epsilon_t, X_{t-2}\right) + bE\left(\epsilon_{t-1}, X_{t-2}\right)$$

$$\gamma(2) = a\cdot\gamma(1)$$